Keine Ahnung von Kreiswinkeln

Was sind denn

Kreiswinkel

wissen ?

Datei Nr. 11501

Stand 12.4.2020

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

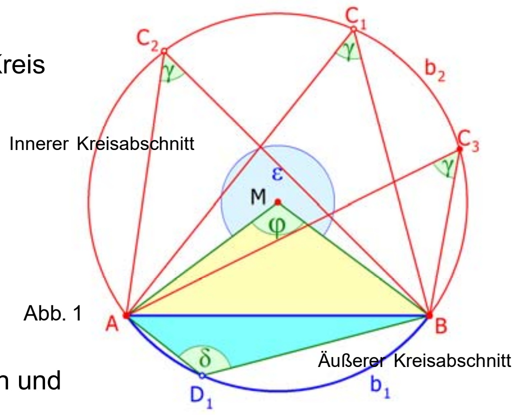
Ich entnehme hier meinem Einführungstext 11505 die wichtigsten Seiten für einen kompakten Text zur Wiederholung der Kreiswinkel.

In 11505 finden die Interessierten auch Beweise. Es ist hochinteressant, wie man diese Eigenschaften von Kreiswinkeln beweisen kann.

Inhalt

1 Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel einer Sehne

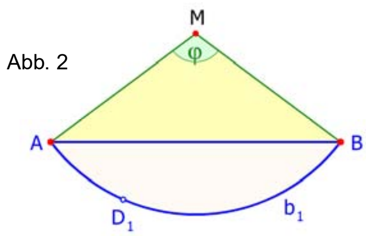
Schneidet eine Gerade einen Kreis in A und B, dann nennt man die Strecke AB eine **Sehne.** Diese Sehne zerteilt den Kreis in zwei **Kreisabschnitte.** Wenn die Sehne durch den Kreismittelpunkt geht, liegen zwei Halbkreise vor.



Geht die Sehne nicht durch den Mittelpunkt, dann hat man einen sogenannten **inneren Kreisabschnitt**, er enthält M, und eine **äußeren Kreisabschnitt**, der M nicht enthält.

Jeder der beiden Kreisabschnitte wird von einem Kreisbogen und der **Sehne AB** begrenzt. Der innere Abschnitt, der M enthält, hat den längeren Kreisbogen b_2. In der Abb. liegen die Punkte C_1, C_2 und C_3 auf diesem Bogen, der hier rot ist. Der äußere Kreisbogen b1 (blau) enthält den Punkt D_1. Er ist kürzer.

Die Abbildung enthält aber auch zwei **Kreisausschnitte.**
Der kleinere Kreisausschnitt hat die Form eines Kuchenstücks und besteht aus dem äußerem Kreisabschnitt und dem gelben Dreieck Der Winkel φ bei M heißt der **Mittelpunktwinkel** des Ausschnitts.
Man sagt aber auch: φ ist der Mittelpunktwinkel der Sehne AB.

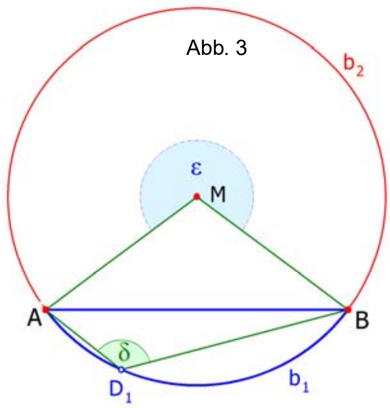


In Abb. 1 habe ich 3 Punkte auf den inneren Kreisbogen gesetzt. Sie bilden Dreiecke ABC_1, ABC_2, ABC_3 (man könnte so weiter machen). Die Winkel γ dieser Dreiecke heißen **Umfangswinkel** der Strecke AB. Jetzt kommt ein wichtiges Ergebnis:

> Die vom gleichen Bogen eines Kreisabschnitts mit der Sehne AB gehenden Umfangswinkel γ sind alle gleich groß und genau halb so groß wie der entsprechende Mittelpunktswinkel φ .

Die Winkel in unseren beiden Abbildungen sind: $\gamma \approx 54{,}13^{\circ}$ und $\varphi \approx 108{,}26^{\circ}$.

Abb. 3 und auch Abb. 1 zeigen den großen Kreisausschnitt mit dem Bogen b_2 und dem Mittelpunktswinkel ε . Der Winkel δ beim Punkt D_1 auf dem äußeren Abschnitt ist auch ein Umfangswinkel zur Strecke AB.



Und auch für ihn gilt: $\boxed{\text{Umfangswinkel} = \dfrac{\text{Mittelspunktswinkel}}{2}}$.

Eine Sehne hat also zweierlei Umfangswinkel und Mittelpunktswinkel.

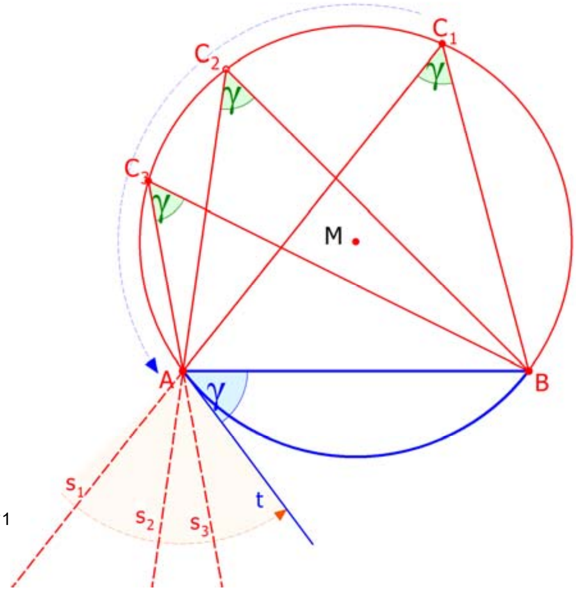
Für sie gilt: $\gamma = \dfrac{\varphi}{2}$ und $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

Addiert man beide, erhält man $\gamma + \delta = \dfrac{\varphi + \varepsilon}{2} = \dfrac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$.

Also gilt für die beiden Umfangswinkel einer Sehne: $\boxed{\gamma + \delta = 180^{\circ}}$

2 Der Sehnen-Tangentenwinkel

Die Abbildung zeigt die Situation einer Sehne AB mit 3 Umfangswinkeln von C_1, C_2, C_3 aus. Wir wissen nach Abschnitt 1, dass diese drei Umfangswinkel γ alle gleich groß sind.



Jetzt stellen wir uns eine Bewegung innerhalb der Abbildung vor: Dazu habe ich zwei Kreisbogenpfeile eingezeichnet.

(1) Ausgangspunkt ist das Dreieck ABC_1. Die Seite C_1A wurde zu einer Halbgeraden s_1 verlängert.

(2) Dann halten wir AB fest und drehen den Punkt C_1 auf dem Kreis gegen den Uhrzeigersinn weiter in die Lage von C_2.

Damit wird aus dem Dreieck ABC_1 das Dreieck ABC_2.
Und der verlängerte Schenkel des Umfangswinkels ist jetzt s_2.

(3) Dies setzen wir fort und drehen C_2 nach C_3, was uns zum Dreieck ABC_3 führt.
Der verlängerte Scheitel ist nun s_3.

(4) Wenn wir die Drehung fortsetzen, wandert C_3 nach A und der Schenkel s_3 wird zur Tangente t.

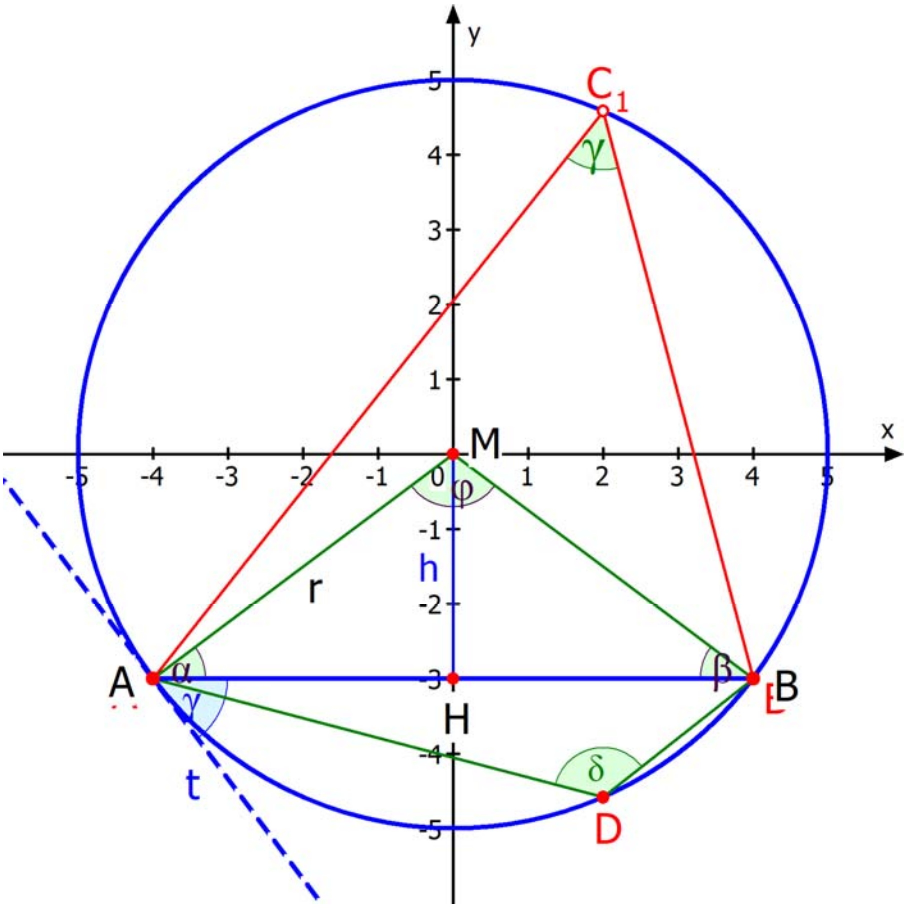
Aus dem Umfangswinkel γ wurde nun ein Winkel zwischen der Sehne AB und der Tangente t.
Man nennt diesen Winkel den **Sehnen-Tangentenwinkel.**

Man erkennt, dass sich bei der Drehung von C auf dem Kreis bis A der Winkel γ in seiner Größe nicht ändert. Also gilt:

Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich groß wie die Umfangswinkel, aus denen er hervorgeht.

Großes Zahlenbeispiel

Unser Kreis hat den Radius 5 und die Sehne AB die Länge 8.



Das Dreieck ABM ist gleichschenklig weil $\overline{AM} = \overline{BM} = r$ ist. Im rechtwinkligen Teildreieck AHM kann man daher den Winkel bei M berechnen. Er ist $\frac{1}{2}\varphi$, der halbe Mittelpunktswinkel.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{AH}{AM} = \frac{\frac{1}{2}AB}{r} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$\frac{\varphi}{2} = \sin^{-1}\left(0{,}8\right) \approx 53{,}13^{\circ} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 106{,}26^{\circ}}$$

Die Umfangswinkel auf dem inneren Bogen ACB sind genau halb so groß, also $\gamma = 53{,}13^{\circ}$.

Der Umfangswinkel auf dem anderen Bogen, also bei D hat dann die Größe $\delta = 180^{\circ} - \gamma = 126{,}87^{\circ}$:

Dazu gehört der große Mittelpunktswinkel $\varepsilon = 360^{\circ} - \varphi = 253{,}74^{\circ}$

Er ist aber auch doppelt so groß wie der Umfangswinkel δ: $\varepsilon = 2 \cdot 126{,}87^{\circ} = 253{,}74^{\circ}$.

Als letztes hatten wir über den Sehnen-Tangenten-Winkel gesprochen.

Sein Scheitel ist bei A. die beiden Schenkel sind die Sehne AB und die Kreistangente in A.

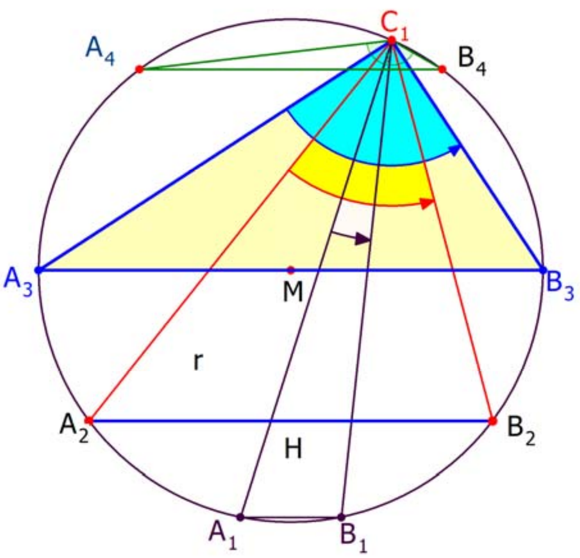
Er hat dieselbe Größe wie der Umfangswinkel $\gamma = 53{,}13^{\circ}$.

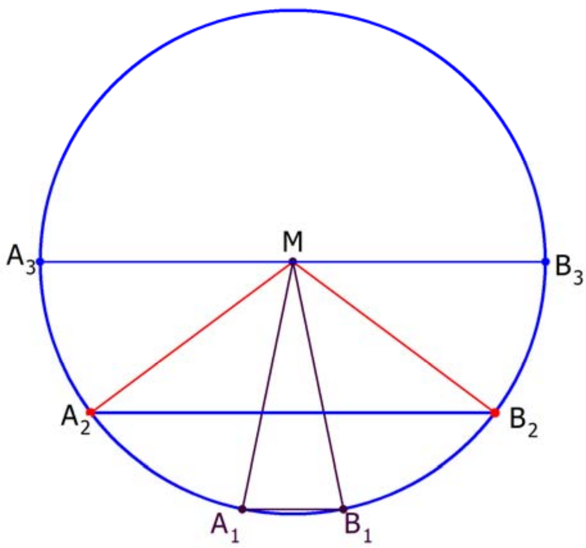
3 Der Thaleskreis

Ganz einfach gesagt:

Geht die Sehne AB durch den Mittelpunkt, dann zerlegt sie den Kreis in zwei Halbkreise und der Umfangswinkel γ hat 90^{O}.

Die Abbildung soll dies zeigen: Ist die Sehne AB klein, also „weit“ weg vom Mittelpunkt, dann ist der Umfangswinkel γ noch recht klein. Je näher die Sehne zum Mittelpunkt rückt, je größer also die Sehne wird, desto größer wird auch der Umfangswinkel (linke Abb.) und der Mittelpunktswinkel (rechte Abb.)





Von den vier dargestellten Sehnen hat A_1B_1 die kleinste Länge und auch den kleinsten Umfangswinkel bei C und Mittelpunktswinkel bei M.

Zur etwas größeren Sehne A_2B_2 gehört ein größerer Umfangswinkel bei C (rot) und ein größerer Mittelpunktswinkel bei M (der doppelt so groß ist wie der Umfangswinkel)

Die Sehne A_3B_3 geht durch den Mittelpunkt. Ihr Umfangswinkel bei C hat 90^{O}:
Der Mittelpunktswinkel hat 180^{O}, denn das Dreieck A_3B_3M ist entartet zu einer Strecke AMB.

Der zu dieser Sehne gehörende Kreisbogen ist ein Halbkreis, der nicht erst von Thales aufgeschrieben wurde, sondern schon den Babyloniern bekannt war.

Ich habe dann noch weit oben die Sehne A_4B_4 eingezeichnet.
Jetzt ist das Dreieck stumpfwinklig und γ hat schon geschätzte 150^{O}

Man kann eine Funktion zur Berechnung von γ definieren,

ich nenne sie $g(s)$ wobei s die Länge der Sehne AB ist.

Zusatz für Interessierte:

Auf Seite 5 habe ich bereits gezeigt, wie man γ und φ trigonometrisch berechnen kann.

Dort kann man nachlesen:

$$\sin\gamma = \sin\tfrac{\varphi}{2} = \frac{AH}{AM} = \frac{\tfrac{1}{2}AB}{r} = \frac{s}{2r} = \frac{s}{10}$$

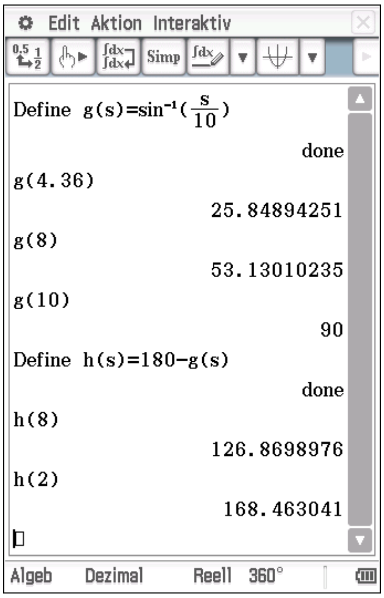
Und für s = 8 ergab sich dort $\sin\gamma = \tfrac{4}{5} \quad\Rightarrow\quad \gamma = \sin^{-1}\left(\tfrac{4}{5}\right)$.

Für beliebiges s gilt:

$$\gamma = \sin^{-1}\left(\frac{s}{10}\right)$$

AB im unteren Halbkreis

AB im oberen Halbkreis



Wenn man mehrere Umfangswinkel in Abhängigkeit von der Länge s der Sehne AB berechnen will, kann man eine Funktion definieren und deren Werte berechnen, wozu sich natürlich besonders ein **CAS-Rechner** eignet (rechts):

Aber auch einfache Rechner helfen dabei:

Definition: $\boxed{\gamma = g(s) = \sin^{-1}\left(\frac{s}{2r}\right)}$

Bei unserem Kreisradius ist r = 5: $g(s) = \sin^{-1}\tfrac{s}{10}$.

Damit habe ich meinen CAS-Rechner gefüttert. Bei s = 10 war die Sehne ein Durchmesser und es folgte $\gamma = 90^{\mathrm{O}}$.

Ist die Sehne im oberen Halbkreis, wird der Winkel stumpf. Dann habe ich h(s) verwendet.

Dies kann man auch mit einfachsten Rechnern berechnen (wie oben).

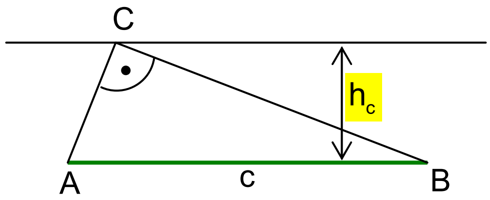
Hier noch ein Link zu einer Spielerei mit dem Thaleskreis.
Man muss mit dem Mauszeiger die Spitze C auf dem Kreisbogen bewegen….

thalescircle_de.htm

Anwendung für den Thaleskreis:

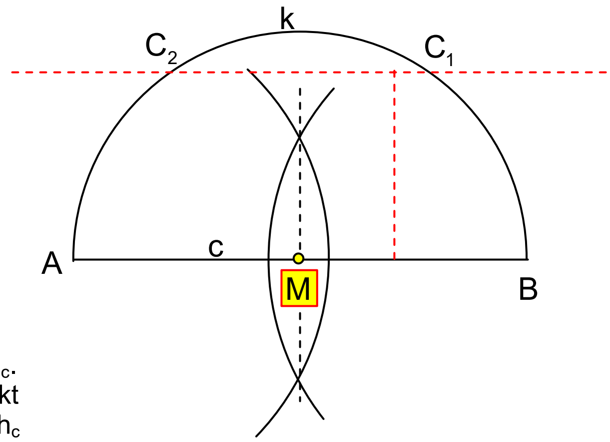
(1) Konstruiere ein Dreieck aus $c = 6$ cm, $\gamma = 90^\circ$ und $h_c = 2{,}5$ cm.

Planfigur:



Das Problem, das man ohne Thaleskreis hat, liegt darin, dass man mit der Strecke AB = c beginnen kann und auch eine Parallele im Abstand h_c zeichnen kann, aber es gibt keinen Anhalt, wie und wo man C und den rechten Winkel zeichnen soll. Auch ein Konstruktionsbeginn mit dem rechten Winkel bringt uns nicht weiter. Daher bleibt „nur" die Thaleskreis-Lösung:

Konstruktion:



Die obere Abbildung enthält der Übersichtlichkeit halber noch nicht die Dreieckslinien AC_1 und BC_1 für das erste Dreieck sowie AC_2 und BC_2 für das zweite.

Konstruktionstext:

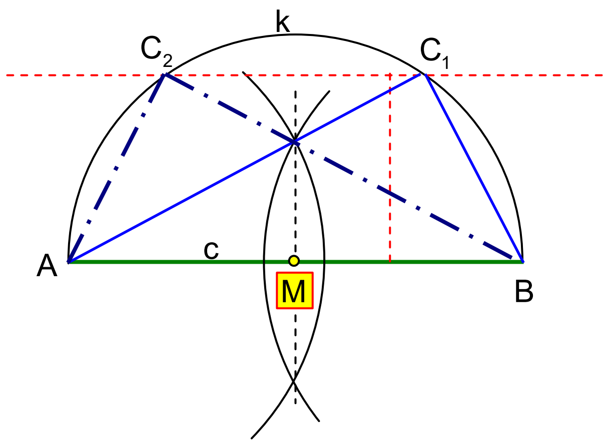
1. Zeichne AB = c und halbiere die Strecke durch den Mittelpunkt M. (Er wurde hier durch Konstruktion der Mittelsenkrechten mit 2 Kreisbögen um A und B ermittelt.)

2. Zeichne den Thaleskreis k über AB (d.h. einen Halbkreis um M durch A und B).

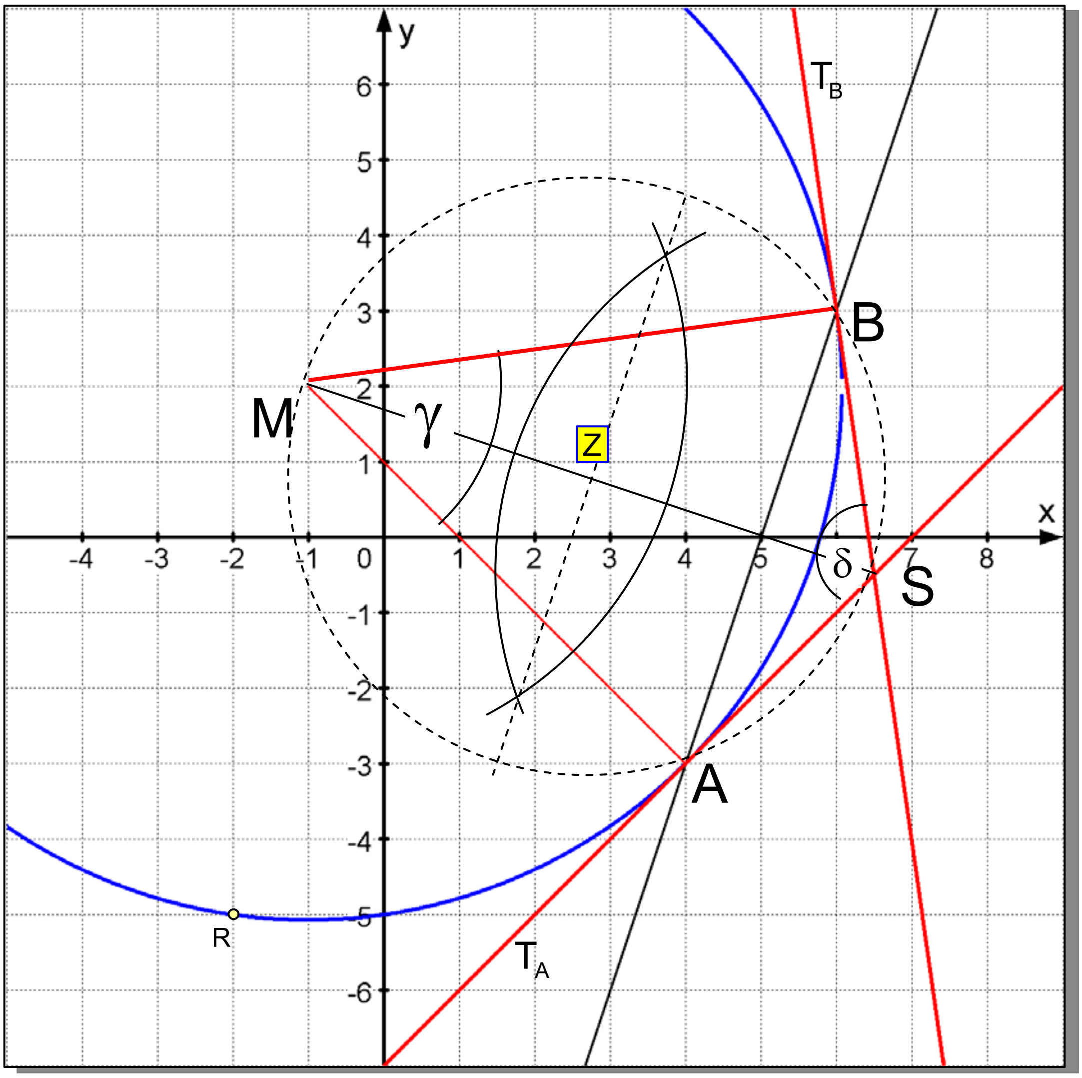
3. Zeichne eine Parallele zu AB im Abstand h_c. (Hier wurde zuerst in einem beliebigen Punkt auf AB eine senkrechte Strecke der Länge h_c gezeichnet und durch deren Endpunkt eine senkrechte Gerade, die dann unsere Parallele p ist.

4. p und k schneiden sich zweimal: In C_1 und C_2.

Bei C_1 und C_2 sind nach dem Satz des Thales automatisch rechte Winkel entstanden!



(2) Zeichne ein Achsenkreuz (x-Achse von – 5 bis 9 und y-Achse von -7 bis 7).
Zeichne einen Kreis um $M_1(-1|2)$ durch $R(-2|-5)$.
Lege von $S(6,5|-0,5)$ die Tangenten an k. Konstruiere die Berührpunkte A, B.



Konstruktion:

Ermittle den Mittelpunkt Z der Strecke MS. Zeichne einen Hilfskreis um Z durch M (und S).

Dieser schneidet den gegebenen Kreis in A und B. Dies sind die Berührpunkte der gesuchten Tangenten, die man jetzt durch S und A (T_A) bzw. S und B (T_B) einzeichnen kann.

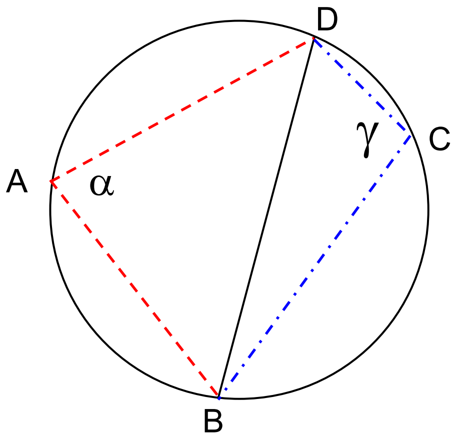
Begründung: Die Strecke MS zerlegt den Hilfskreis in zwei Halbkreise. Daher entstehen in den Schnittpunkten A und B rechte Winkel (Thaleskreis) zwischen Radius und Tangente.

4 Sehnenvierecke.

Wir haben in diesem Text immer wieder Sehnenvierecke behandelt ohne diese namentlich so zu erwähnen.

Ein Viereck heißt **Sehnenviereck**, wenn es einen Umkreis besitzt, also wenn seine vier Seiten Sehnen eines Kreises sind.

Ein Sehnenviereck hat eine angenehme Winkeleigenschaft, die wie bereits kennen:
Dazu zeichne ich eine Diagonale ein.



oder

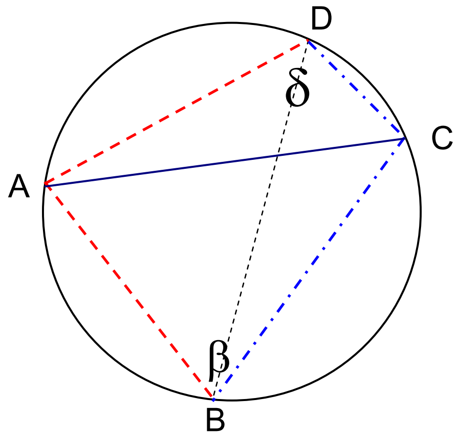


Abbildung links:

α und γ sind Umfangswinkel über der Strecke BD. Sie liegen auf verschiedenen Seiten von BD, also beträgt ihre Summe 180°.

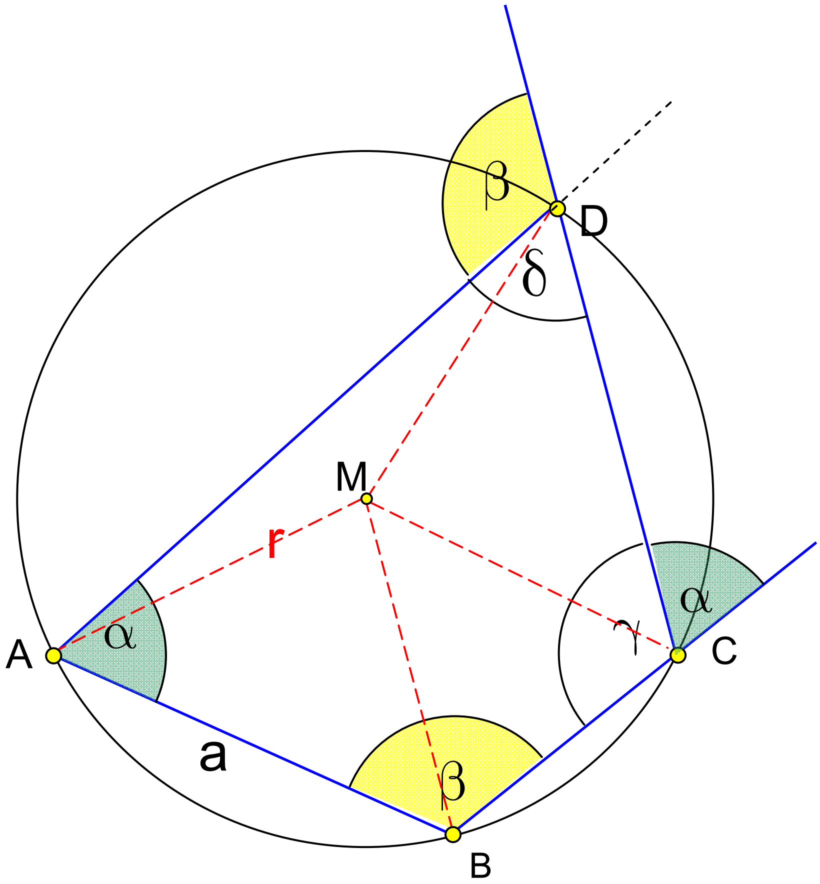
Abbildung rechts:

β und δ sind Umfangswinkel über der Strecke AC. Sie liegen auf verschiedenen Seiten von AC, also beträgt ihre Summe 180°.

Dies kann man in einem Satz zusammenfassen:

In einem Sehnenviereck beträgt die Summe gegenüberliegender Winkel stets 180 °.

Die Außenwinkel in einem Sehnenviereck haben eine wichtige Eigenschaft:



Verlängert man die Viereckseiten über die Eckpunkte hinaus, entstehen vier Winkel. Dies wurde an der Ecke D gemacht. Je zwei sind als Scheitelwinkel gleich groß. Daher wurden bei D zwei dieser vier Winkel eingefärbt. Der im Viereck liegende ist δ. Sein Nebenwinkel beträgt $180^{O} - \delta$ und hat daher dieselbe Größe wie der gegenüberliegende Eckenwinkel β. (Denn im Sehnenviereck haben Gegenwinkel zusammen 180^{O}.)

An der Ecke C liegt im Dreieck der Innenwinkel γ. Sein Nebenwinkel hat die Größe $180^{O} - \gamma$ und ist daher gleich groß wie der Gegenwinkel α. Das kann man auch an den Ecken A und B durchführen.

MERKE:

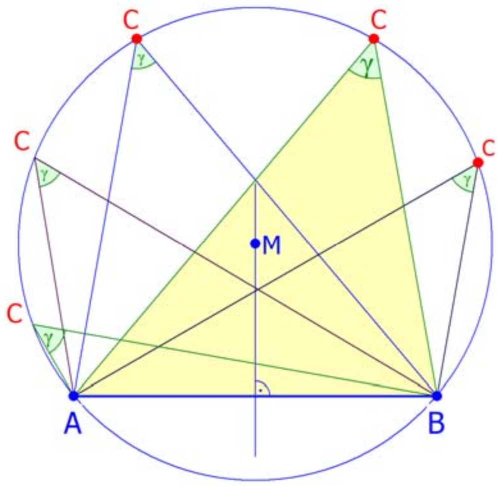
Die Außenwinkel haben im Sehnenviereck dieselbe Größe wie der gegenüberliegende Innenwinkel.

Damit kann man bestimmte Sehnenvierecke konstruieren. Interessenten können dies im Text 11506 nachlesen.

5 Fasskreis-Konstruktionen

5.1 Den Fasskreis finden

Gegeben sei eine Strecke, etwa AB = 6 cm.
Wir wollen sie zu einem Dreieck ergänzen,
das den Winkel $\gamma = 50^O$ hat.



Die Abbildung zeigt, dass es dazu viele Möglichkeiten gibt, denn ich kann ja α in weitem Bereich frei wählen.

So entstehen beliebig viele Punkte C, bei denen stets der Winkel $\sphericalangle ACB = \gamma = 50^O$ liegt.

Diese Punkte C liegen alle auf einem Kreisbogen von A nach B, genannt **Fasskreis** zum Winkel 50^O.
γ ist der **Umfangswinkel**, der zu Beginn dieses Textes besprochen worden ist.

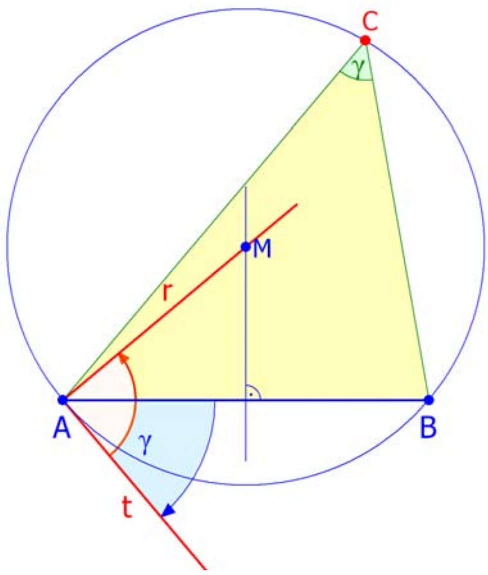
Wie findet man den Mittelpunkt eines Fasskreises

Aus Gründen der Symmetrie muss der Mittelpunkt des durch A und B gehenden Kreises auf der **Mittelsenkrechte von AB** liegen. Denn auf ihr liegen alle Punkte, die von A und B den gleichen Abstand haben. Aber wo auf der Mittelsenkrechten liegt nun M?

Da hilft uns der auf Seite 4 besprochene Sehnen-Tangenten-Winkel weiter.

Konstruktion von M:

1. Konstruiere die Mittelsenkrechte zu AB.
2. Lege an AB in A den Winkel γ an.
   Das ist der Sehnen-Tangenten-Winkel, der gleich groß ist wie der Umfangswinkel.
   Sein freier Schenkel ist die Tangente t an den zu zeichnenden Fasskreis.
3. Zeichne eine Senkrechte zu dieser Tangente durch A, ist also der Radius für A.
4. Dieser Radius schneidet die Mittelsenkrechte im Umkreismittelpunkt M.



So, nun kannst du den Fasskreis zeichnen und darauf einen Punkt C für das Dreieck ABC festlegen, je nach Aufgabenstellung.
Übrigens: Es gibt einen zweiten Kreisbogen auf der anderen Seite von AB, der auch Fasskreis zu AB ist.

Aus dem soeben gelernten mache ich jetzt eine Aufgabe:

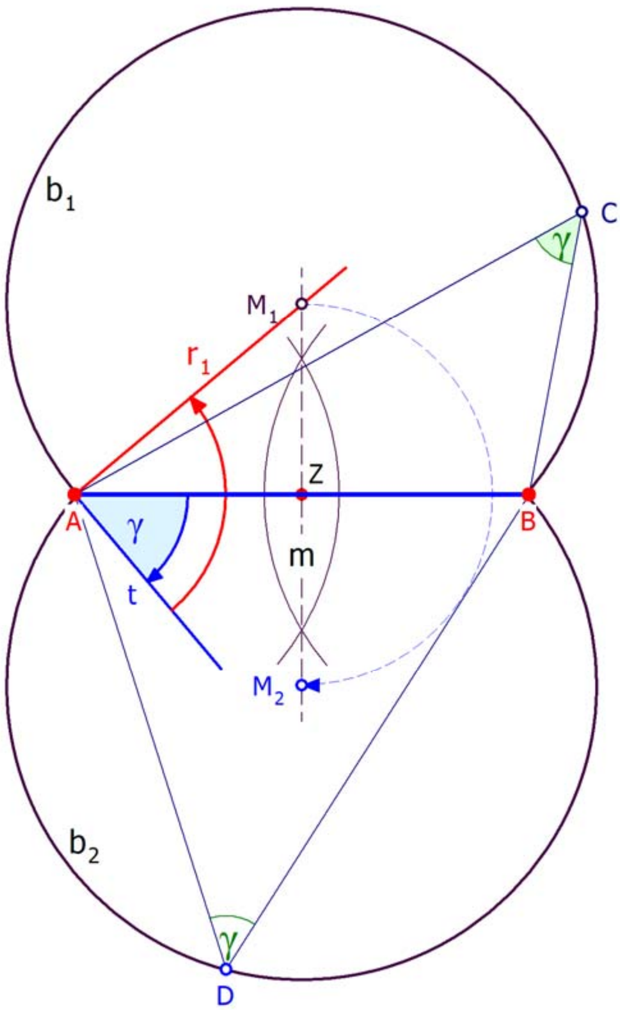
5.2 Grundaufgabe

Konstruiere die Fasskreise zu einer Strecke $\overline{AB} = 6\,cm$,
von denen aus man diese Strecke unter dem Winkel $\gamma = 50^o$ sieht.

Lösung:

1. Man zeichnet die Strecke AB und legt in A an AB den Winkel γ als Sehnen-Tangenten-Winkel an. Der freie Schenkel ist eine Kreistangente t.
2. Dann konstruiert man die Mittelsenkrechte m zu AB. (2 Kreisbögen um A und B mit gleichem Radius).
3. Die Senkrechte r_1 auf die Tangente t in A schneidet die Mittelsenkrechte m in M_1.
4. Nun kann man den oberen Kreisbogen b_1 um M_1 durch A zeichnen.
5. Man spiegelt M_1 an AB (Kreisbogen um den Mittelpunkt Z von AB durch M_1) bis M_2.
6. Der Kreisbogen b_2 um M_2 nach unten ist der zweite Fasskreis.

Ich habe noch zwei Umfangswinkel der Größe γ eingetragen, einmal liegt der Scheitel C auf dem oberen Fasskreis, einmal als D auf dem unteren.



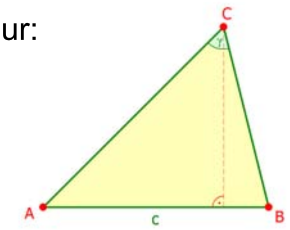
5.3 Anwendung zur Dreieckskonstruktion

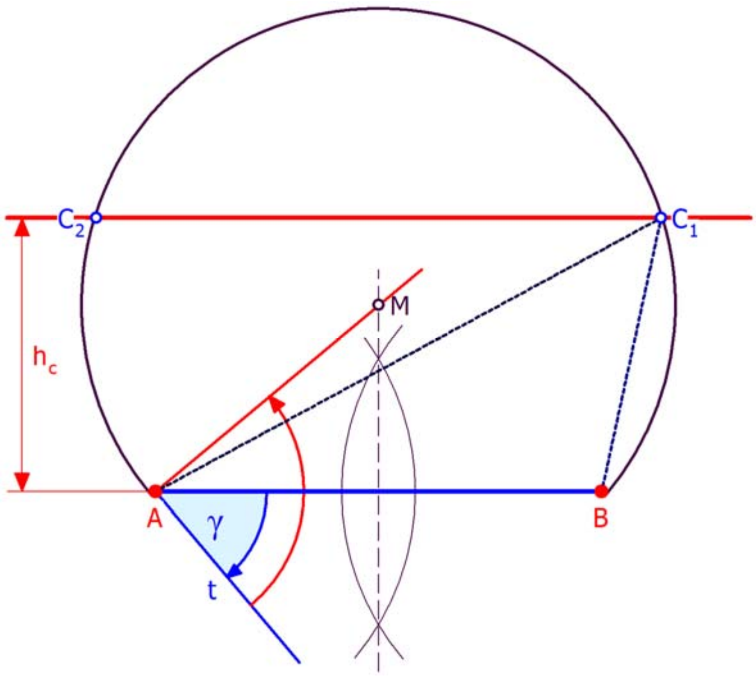
Musterbeispiel

Gesucht ist ein Dreieck, von dem diese Bestimmungsstücke bekannt sind:

$\overline{AB} = c = 6\text{ cm}$, $\gamma = 50^{O}$ und $h_c = 3{,}7\text{ cm}$.

Planfigur:





Konstruktionsbeschreibung

1. Zeichne AB = c und lege an AB in A den Winkel γ als Sehnen-Tangenten-Winkel an.

   Der freie Schenkel ist die Tangente t. in A an den Umkreis.

2. Das Lot auf t in A und die Mittelsenkrechte über AB schneiden sich im Fasskreis-Mittelpunkt M.

3. Zeichne nun den Fasskreis um M mit Radius MA.

4. Weil C von AB den Abstand h_C haben soll, zeichnet man eine Parallele zu AB im Abstand h_C. Diese schneidet k in C_1 und C_2.

Es gibt also 2 Lösungen, die kongruent sind. (Um die Abbildung übersichtlich zu halten wurde das 2. Dreieck ABC_2 nicht eingezeichnet.

Begründung:

Weil C_1 und C_2 auf dem Fasskreis liegen, ist der Winkel bei diesen Punkten automatisch so groß wie der Sehnen-Tangenten-Winkel, den wir in A an AB angelegt haben, also ist es γ.

Hinweis:

Der Konstruktions-Trick besteht also darin, dass man γ als Sehnen-Tangenten-Winkel an AB anlegt, darauf die Senkrechte zeichnet. Diese geht dann durch den Mittelpunkt, weil der Radius auf der Tangente senkrecht steht. Andererseits ist M von A und B gleich weit entfernt, d.h. M liegt auf der Mittelsenkrechten zu AB.

Würde man den zweiten Fasskreis nach unten auch noch verwenden, hätte man vier Lösungsdreiecke gefunden. Sie sind jedoch alle kongruent.